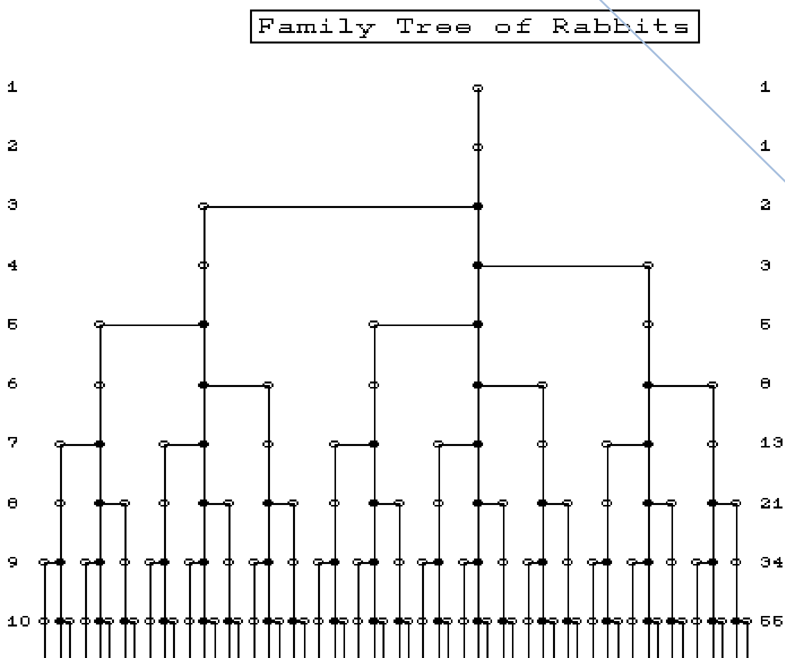
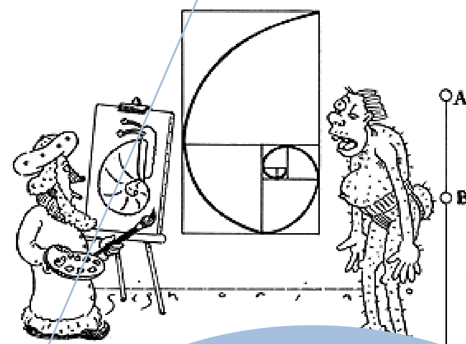
ĐI TÌM CÔNG THỨC TỔNG QUÁT DÃY SỐ





$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} \qquad \lim_{x\to\infty}$$

$$u_n = u_n^* + \hat{u}_n$$

$$u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$$

TRẦN DUY SƠN

Xuân kỷ sửu 2009

Giới thiệu

Dãy số là một phần của Đại số cũng như Giải tích toán học. Dãy số đóng một vai trò cực kì quan trọng trong toán học cũng như nhiều lĩnh vực của đời sống. Trong các kì thi HSG quốc gia, IMO (Olympic toán học quốc tế), hay những kì thi giải toán của nhiều tạp chí toán học các bài toán về dãy số được xuất hiện khá nhiều và được đánh giá ở mức độ khó. Các bạn học sinh cũng đã được làm quen với dãy số từ rất sớm, từ hồi tiểu học chúng đã được làm quen với các bài toán về dãy số như: tìm quy luật của một dãy số đơn giản,…

Đây không phải một giáo trình về lí thuyết dãy số mà chỉ là một chuyên đề nhỏ trình bày một vấn đề nhỏ trong lĩnh vực dãy số. Tập tài liệu này gần như một bài viết mở, như một cuộc trao đổi, trò chuyên, trình bày con đường đi tìm công thức tổng quát của một số dạng dãy số cơ bản, từ đó ứng dụng để giải một số bài toán.

Do đây là chuyên đề đầu tay của tôi, nên nội dung cũng như cách trình bày trong tài liệu này chắc chắn còn nhiều thiếu xót, rất mong bạn đọc thông cảm và có ý kiến đóng góp để bài viết được hoàn thiện. Mọi ý kiên đóng góp, phản hồi xin gửi về địa chỉ hòm thư: *ibelieveicanfly@ymail.com*

Trần Duy Sơn
Xuân kỷ sửu 2009

Một số kí hiệu dùng trong tập tài liệu

- CSN – Cấp số nhân
- CSC – Cấp số cộng
- CTTQ – Công thức tổng quát

Mục lục

Đi tìm công thức tổng quát dãy số

Trong phần này, tôi và các bạn sẽ cùng nhau tìm hiểu và nêu ý tưởng tìm CTTQ của một số dạng dãy số bản. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một bài tập đơn giản trong sách giáo khoa sau:

Ví dụ 1: *(Bài 45, trang 123, Đại số & Giải tích 11 nâng cao)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 2$ và $u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2}\ \ \forall n \geq 2.$ Chứng minh rằng $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$
Với mọi số nguyên dương n.

Ý tưởng:

Khi gặp dạng bài chắc hẳn nhiều bạn sẽ nghĩ ngay đến việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Nhưng làm như thế thì chẳng có gì thú vị, vậy tại sao chúng ta không thử đi tìm một cách giải khác cho bài toán này! Ta nhận thấy đề bài cho một công thức truy hồi xác định dãy (u_n) và cho số hạng đầu tiên $u_1 = 2$ nên ý tưởng của chúng ta sẽ là tìm cách đưa (u_n) về một CSC hoặc CSN để dễ dàng liên hệ với u_1 đã cho.

Giải:

Ta viết lại $(u_n): 2u_n = u_{n-1} + 1$ từ đó ta sẽ tìm cách đưa về CSN. Nhưng một rắc rối nhỏ là ở vế phải của công thức truy hồi có số 1. Bây giờ nếu đặt $u_n = v_n + d$ và thay vào dãy ta được: $2(v_n + d) = v_{n-1} + d + 1.$ Từ đó nếu $2d = d + 1 \Leftrightarrow d = 1$ thì (v_n) sẽ là một CSN với công bội $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}v_1$. Mà $v_1 = u_1 - a \Rightarrow v_1 = 1 \Rightarrow u_n = v_n + d = \dfrac{1}{2^{n-1}} + 1 = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}.$
Đến đây bài toán coi như được chứng minh xong!

Nhận xét:

Bài toán trên rất đơn giản và điển hình cho dạng bài tìm CTTQ của dãy số. Thông thương chúng ta có thể dễ dàng giải nó bằng phương pháp quy nạp. Nhưng nếu không cho trước CTTQ của dãy số thì phương pháp quy nạp gần như *vô hiệu* và cần có phương pháp cho nhưng trường hợp như thế. Trong tập tài liệu này tôi và các bạn sẽ cùng nhau *đi tìm CTTQ của dãy số*. Tiếp theo ta sẽ xét một số ví dụ khác sau đây.

Ví dụ 2:
Tìm CTTQ của dãy (u_n) được xác định: $u_1 = 2,\ u_n = 2u_{n-1} + n - 2\ \ \forall n \geq 2.$

Ý tưởng:

Tiếp tục ý tưởng như ví dụ 1, tuy nhiên ta thấy ở trong công thức truy hồi đã cho xuất hiện một đa thức theo n là $n-2$ nên cách làm của chúng ta sẽ hơi khác một chút.

Giải:

Giả sử: $u_n = v_n + an + b \ (2)$.

Thay vào dãy đã cho ta được: $v_n + an + b = 2(v_{n-1} + a(n-1) + b) + n - 1,$ chọn a,b sao cho $an + b = 2a(n-1) + 2b + n - 1 \Leftrightarrow a(n-2) + b + n - 1 = 0 \Rightarrow (v_n)$ là một CSN và $v_n = 2^{n-1}v_1$. Thay $n = 1,2 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$. Tiếp tục thay a,b vào (2) suy ra: $v_1 = u_1 + 1 + 1 = 4$

$\Rightarrow v_n = 2^{n-1}v_1 = 2^{n+1} \Rightarrow u_n = 2^{n+1} - n - 1.$

Ví dụ 3:

Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2^n \end{cases} \forall n \geq 2.$ Tìm CTTQ của (u_n).

Giải: Giả sử: $u_n = v_n + q2^n \ (3)$.

Thay vào dãy số đã cho ta được: $v_n + q2^n = 3(v_{n-1} + q2^{n-1}) + 2^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_n = 3^{n-1}v_1 \\ q2^n = 3q2^{n-1} + 2^n \end{cases} \Rightarrow q = -2.$$

Thay vào (3) suy ra: $v_1 = u_1 - 2^1 = -1 \Rightarrow v_n = -3^{n-1} \Rightarrow u_n = 2^n - 3^{n-1}.$

Nhận xét:

Từ ba ví dụ trên, chúngta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:
(cách giải tổng quát sẽ nói tới trong phần *Phương trình sai phân tuyến tính*)

Bài toán tổng quát 1:

Cho dãy (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = c \\ au_n = bu_{n-1} + f(n) \end{cases} \forall n \geq 2.$

Trong đó a,b,c là các hằng số và $f(n)$ là một đa thức theo n. Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Các bạn có thể tự tổng quát bài toán trên dưới dạng công thức, với một chút kiên nhẫn biến đổi tôi cũng tìm được hai CTTQ sau đây, ngoài ra các bạn hãy tự mình tổng quát những công thức phức tạp hơn.

Công thức tổng quát 1:

Cho dãy (u_n) được xác định: $\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_n = qu_{n-1} + d \end{cases} \forall n \geq 2$

Trong đó $a, b \neq 0$ là các hằng số, có CTTQ là:

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} x_1 + (n-1)d & (\text{khi } q = 1) \\ q^{n-1}x_1 + d\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1} & (\text{khi } q \neq 1) \end{array} \right.$$

Công thức tổng quát 2:

Cho dãy (u_n) được xác định: $\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_n = au_{n-1} + b\alpha^{n-1} \end{cases} \forall n \geq 2$

Trong đó $a, b \neq 0,\ \alpha,$ là các hằng số.

i. Nếu $a = \alpha$ thì $u_n = b(n-1)\alpha^{n-1} + x_1\alpha^{n-1}$.

ii. Nếu $a \neq \alpha$ thì $u_n = a^{n-1}\left(x_1 - \dfrac{b}{\alpha - a}\alpha\right) + \dfrac{b}{\alpha - a}\alpha^n$.

Thế là bắt đầu hình thành phương pháp rồi đấy nhỉ! Chúng ta tiếp tục bằng một bài toán rất nổi tiếng sau đây:

Một đôi thỏ con (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) kể từ lúc tròn hai tháng tuổi cứ mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con (gồm một thỏ đực và một thỏ cái). Giả sử từ lúc đầu tháng giêng có một đôi thỏ sơ sinh., hỏi đến đầu tháng n có bao nhiêu đôi thỏ.

Bài toán Fibonacci, trích cuốn Liber Abaci (sách về toán đố).

Ý tưởng:

Đây là một bài toán đố đơn thuần, để tiện cho việc giải toán, ta sẽ tìm cách viết lại đề bài. Gọi F_n là số đôi thỏ sau n tháng. Thì $F_1 = 1,\ F_2 = 1.$ Ta dễ thấy đến tháng ba, đôi thỏ ở tháng giêng đẻ còn đôi thỏ sinh ra ở tháng hai mới 1 tháng tuổi nên chưa đẻ nên có $F_3 = 2 + 1 = 3$ đôi thỏ, đến tháng thứ tư thì đôi thỏ ở tháng giêng và tháng hai đẻ nên có $F_4 = 3 + 2 = 5$ đôi thỏ. Cứ tiếp tục suy diễn như vậy ta suy ra: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Đề bài được viết lại như sau:

Ví dụ 4: *(dãy Fibonacci)*

Dãy (F_n) được xác định $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \ \forall n \geq 3.$ Tìm CTTQ của (F_n).

Ý tưởng:

Không như những bài toán đã gặp ở trên, bài toán này chúng ta gặp một công thức truy hồi liên quan tới 3 số hạng của dãy. Ý tưởng của chúng ta bây giờ sẽ là tìm cách biến đổi công thức truy hồi đó về dạng đơn giản hơn chỉ liên quan tới 2 số hạng của dãy.

Giải:

Giải sử: $F_n - \lambda_1 F_{n-1} = \lambda_2 (F_{n-1} - \lambda_1 F_{n-2}) = \lambda_2^{n-2}(F_2 - \lambda_1 F_1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Suy ra λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, giải PT ta được hai nghiệm

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Chọn $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\Rightarrow F_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) F_{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} . \left(F_2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) F_1\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} . \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow F_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) F_{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Áp dụng kết quả **công thức tổng quát 2** ta suy ra:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

Chú ý:

- Bài toán trên được **Leonardo Pisano** (khoảng 1170-1250) hay còn gọi là **Fibonacci** phát biểu lần đầu tiên ttrong một cuốn sách của mình tên là *Liber Abaci* dưới dạng một bài toán đố. Dãy *Fibonacci* là một dãy số có rất nhiên ứng dụng trong *toán học, kinh tế, sinh học, hội họa,…* Có rất nhiều tính chất tuyệt đẹp của dãy *Fibonacci* nhưng trong khuôn khổ của tập tài liệu không thể nói đến được, hi vọng có thể cùng các bạn trao đổi về dãy *Fibonacci* trong một chuyên đề khác!
- Công thức chúng ta vừa tìm được còn có tên là *công thức Binet* do nhà toán học Pháp **Binet** (1786 – 1856) tìm ra đầu tiên.

Từ cách làm ở **ví dụ 4**, ta rút ra được bài toán tổng quát sau:

Bài toán tổng quát 2:

Cho dãy (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = x_1,\ u_2 = x_2 \\ u_n - au_{n-1} + bu_{n-2} = 0 \end{cases} \forall n \geq 3.$

Trong đó a, b, x_1, x_2 là các hằng số và $a^2 - 4b \geq 0$. Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Giải: *(tổng quát)*

Giải phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - a\lambda + b = 0.$ từ đó tìm được λ_1, λ_2, khi đó:

$$u_n - \lambda_1 u_{n-1} = \lambda_2(u_{n-1} - \lambda_1 u_{n-2}) = ... = \lambda_2^{n-1}(u_2 - \lambda_1 u_1)$$
$$\Leftrightarrow u_n = \lambda_1 u_{n-1} + (x_2 - \lambda_1 x_1)\lambda_2^{n-1}$$

Áp dụng **Công thức tổng quát 2**:

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$ thì: $u_n = \left(x_2 - \frac{a}{2}x_1\right)(n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} + x_1\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}\left[\left(x_2 - \frac{a}{2}x_1\right)(n-1) + x_1\frac{a}{2}\right] = \left(k(n-1)l\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}$$

Trong đó k, l là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} l = \dfrac{x_1 a}{2} \\ k + l = x_2 \end{cases}$ **(sửa)**

Ví dụ 5:

Cho dãy (u_n) được xác định: $\begin{cases} u_1 = -1,\ u_2 = 3 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2n^2 + 2n + 1\ \forall n \geq 2 \end{cases}$

Tìm CTTQ của (u_n) .

Giải:

Giải sử: $u_n = v_n + an^2 + bn + c$, cần chọn a, b, c sao cho:

$$\begin{cases} 2n^2 + 2n + 1 = (an^2 + bn + c) - 5(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) + 6(a(n-2)^2 + b(n-2) + c)\ (5.1) \\ v_{n+1} - 5v_n + 6v_{n-1} = 0\ (5.2) \end{cases}$$

Thay lần lượt $n = 0,1,2$ vào (5.1) ta có hệ:

$$\begin{cases} 19a - 7b + 2c = 1 \\ 7a - 5b + 2c = 5 \\ -a - 3b + 2c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \\ c = 19 \end{cases}$$

Đến đây ta giải tiếp (5.2) từ đó có thể suy ra (u_n), công việc này xin được dành bạn đọc.

Ví dụ 6:

Tìm CTTQ của (u_n) biết: $u_1 = 1,\ u_n = \dfrac{u_n}{u_n + 2}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Giải:

Ta có: $u_n = \dfrac{u_n}{u_n + 2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n + 2}{u_n} = 1 + \dfrac{2}{u_n}.$

Đặt: $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = 1 + 2v_{n-1} \end{cases}$

$\Rightarrow v_n = 2^n - 1 \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{2^n - 1}.$

Nhận xét:

Đây là dạng bài toán tìm CTTQ của dãy số cho bởi một công thức truy hồi dạng phân tuyến tính với các hệ số hằng. Chúng ta có thể dễ dàng tổng quát bài toán trên dưới dạng sau đây:

Bài toán tổng quát 3:

Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \alpha,\ u_n = \dfrac{pu_{n-1} + q}{ru_{n-1} + s}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Trong đó α, p, q, r, s là các hằng số. Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Giải: *(tổng quát)*

Đặt: $u_n = v_n + t \Rightarrow v_n + t = \dfrac{p\left(v_{n-1} + t\right) + q}{r\left(v_{n-1} + t\right) + s} \Leftrightarrow v_n = \dfrac{\left(p - rt\right)v_{n-1} - rt^2 + (p - s)t + q}{rv_{n-1} + rt + s}.$

Ta chọn: $rt^2 + (p - s)t + q = 0$ khi đó: $\dfrac{1}{v_n} = \alpha\dfrac{1}{v_{n-1}} + \beta$. Từ đó tìm được CTTQ của (v_n) rồi suy ra (u_n).

Chúng ta tiếp tục xét một ví dụ sau là dạng bài xác định CTTQ của dãy số khi biết công thức truy hồi có căn thức

Ví dụ 7:

Cho dãy (u_n) được xác định: $u_1 = 2,\ u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2 - 2}$. Tìm CTTQ của (u_n) .

Ý tưởng:

Ta thấy trong công thức truy hồi có căn thức nên việc đầu tiên của chúng ta làm sẽ là khai triển căn thức, từ đó sẽ tìm cách đưa dãy về dạng đơn giản hơn.

Giải:

Viết lại công thức truy hồi: $\left(u_{n+1} - 2u_n\right)^2 = 3u_n^2 - 2 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 4u_{n+1}u_n + u_n^2 + 2 = 0$. Thay n bằng $n-1$ ta được: $u_n^2 - 4u_nu_{n-1} + u_{n-1}^2 + 2 = u_{n-1}^2 - 4u_{n-1}u_n + u_n^2 + 2 = 0$.

Từ đó suy ra: u_{n+1} và u_{n-1} là nghiệm của phương trình: $x^2 - 4xu_n + u_n^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.

Từ đây ta đã đưa được về dạng quen thuộc, các bạn hãy giúp tôi hoàn thành nốt bài toán này!

Ví dụ 8:

Cho 2 dãy số $(u_n),\ (v_n): \begin{cases} u_1 = 1,\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

Tìm CTTQ của (u_n) và (v_n).

Giải:

Thay n bằng $n-1$ ta được:

$\begin{cases} u_n = 4u_{n-1} - 2v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + v_{n-1} \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} = 4u_n - 2v_n = 4u_n - 2(u_{n-1} + v_{n-1}) = 4u_n - 2u_{n-1} - 2v_{n-1}$

$= 4u_n - 2u_{n-1} + u_n - 4u_{n-1} = 5u_n - 6u_{n-1}$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases} \Rightarrow u_n = 2^{n-1}$. Thay vào hệ đã cho, suy ra:

$v_{n+1} = v_n + 2^{n-1} \Rightarrow v_n = 2^{n-1}$.

Nhận xét:

Đây là dạng bài toán xác định CTTQ dãy số cho bởi một hệ phương trình. Ta có thể tổng quát bài toán trên dưới dạng:

Bài toán tổng quát 4:

Cho dãy $(u_n),\ (v_n)$ được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \alpha,\ v_1 = \beta \\ u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ v_{n+1} = ru_n + sv_n \end{cases}$

Trong đó $\alpha, \beta, p, q, r, s$ là các hằng số. Tìm CTTQ của dãy $(u_n),\ (v_n)$.

Giải: *(tổng quát)*

Thay n bằng $n-1$ ta được hệ $\begin{cases} u_n = pu_{n-1} + qv_{n-1} \\ v_n = ru_{n-1} + sv_{n-1} \end{cases}$

$\Rightarrow u_{n+1} = pu_n + qv_n = pu_n + q(ru_{n-1} + sv_{n-1})$

$= pu_n + qru_{n-1} + s(u_n - pu_{n-1}) = (p+s)u_n + (qr - ps)u_{n-1}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - (p+s)u_n + (ps - qr)u_{n-1} = 0$

Từ đây ta đưa được về dạng như **Bài toán tổng quát 2**.

Ngoài việc tìm CTTQ của những bài toán cho trước, chúng ta cũng có thể tự tổng quát một số dạng dãy số khác. Chúng ta sẽ cùng nhau xét một ví dụ: xây dựng phương trình phi tuyến bậc cao từ nghiệm của một phương trình bậc 2.

Xét phương trình bậc 2: $x^2 - mx + 1 = 0$ *có nghiệm là* x_1 *và* x_2. *Xét mộ số thực* α *bất kì và dãy số* $u_n = \alpha\left(x_1^{2^n} + x_2^{2^n}\right)$. *Khi đó* $u_n^2 = \alpha^2\left(x_1^{2^{n+1}} + x_2^{2^{n+1}} + 2\right) = \alpha u_{n+1} + 2\alpha^2$

$\Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\alpha} - 2\alpha$. *Từ đây ta có bài toán:*

Ví dụ 9:

Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2,\ u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$. Tìm CTTQ của (u_n).

Giải: Ta thấy: $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\frac{1}{2}} - 2.\dfrac{1}{2}$ Trong trường hợp này $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Lại có:

$$u_0 = \alpha\left(x_1^{2^0} + x_2^{2^0}\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 2 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}\right).$$

Chú ý:

- Trong phần nay chúng ta vừa cùng nhau tìm hiểu và nêu ý tưởng tìm CTTQ của một số dạng dãy số cơ bản. Tuy nhiên còn nhiều dạng dãy số khác, do khuôn khổ tài liệu có hạn không thể đề cập hết ở đây. Rất mong các bạn thông cảm và hãy tự mình tìm hiểu, khám phá những loại dãy số mới!
- Trong các phần tiếp theo, tôi sẽ giới thiệu một số bài toán mà trong quá trình giải có sử dụng kết quả của phần này. Nhưng trước tiên, chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu một khái niệm rất thú vị sau!

Phương trình sai phân tuyến tính

Phương trình sai phân tuyến tính là một công cụ rất mạnh trong việc tìm CTTQ của dãy số. Trong phần này, tôi sẽ giới thiệu vơi các bạn khái quát về phương trình sai phân tuyến tính cấp một và cấp hai.

1. Phương trình sai phân tuyến tính cấp một (bậc nhất)

Định nghĩa: Phương trình sai phân tuyến tính cấp một là phương trình sai phân dạng:

$$u_1 = \alpha,\ au_{n+1} + bu_n = f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đó $a, b \neq 0, \alpha$ là những hằng số và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

Phương pháp giải:

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ ta tìm được λ. Giải sử: $u_n = u_n^* + \hat{u}_n$ trong đó: u_n^* là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = 0$ và $\hat{u}_n$ là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = f(n)$. Vậy $u_n^* = q\lambda^{n-1}$ (q là hằng số sẽ xác định sau). Để xác định $\hat{u}_n$ ta làm như sau:

i. Nếu $\lambda \neq 1$ thì $\hat{u}_n$ là đa thức cùng bậc với $f(n)$.

ii. Nếu $\lambda = 1$ (khi đó dãy (u_n) là CSC) thì $\hat{u}_n = n.g(n)$ trong đó $g(n)$ là một đa thức cùng bậc với $f(n)$.

Thay $\hat{u}_n$ và phương trình, đồng nhất hệ số ta sẽ tính được các hệ số của $\hat{u}_n$.

2. Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai

Định nghĩa: Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai là phương trình sai phân dạng:

$$u_1 = \alpha,\ \mathrm{u}_2 = \beta,\ au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đó α, β, a, b, c là các hằng số khác, $a \neq 0$ và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

Phương pháp giải:

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b + c = 0$ ta tìm được λ.

i. Nếu λ_1, λ_2 là hai nghiệm thực bằng nhau: $\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda$ thì: $u_n = \left(A + B.n\right)\lambda^n$ trong đó A, B được xác định khi biết u_1, u_2.

ii. Nếu λ_1, λ_2 là hai nghiệm thực khác nhau thì: $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ trong đó A, B được xác định khi biết u_1, u_2.

iii. Nếu λ là hai nghiệm phức, giả sử: $\lambda = x + iy$ thì: $\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $u_n = r^n\left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right)$, trong đó:

$r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \tan\varphi = \frac{y}{2}, \ \varphi \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ và A, B được xác định khi biết u_1, u_2.

Chú ý:

- Như các bạn đã thấy, nhiều suy luận trong phần *đi tìm công thức tổng quát dãy số* của chúng ta khá giống với tư tưởng của *phương trình sai phân tuyến tính*. Tuy nhiên, những suy luận đó rất tự nhiên, trong sáng và hoàn toàn không cần tới một công cụ cao cấp như *phương trình sai phân tuyến tính* phải không các bạn !
- *Phương trình sai phân tuyến tính* hay một số công cụ khác (ví dụ: *hàm sinh*) là những khái niệm thuộc toán học cao cấp, có nhiều ứng dụng trong việc tìm CTTQ của dãy số. Nhưng để đảm bảo tính sơ cấp của tập tài liệu, những khái niệm đó không được đề cập tại đây, rất mong bạn đọc thông cảm!

P/s: Nếu các bạn muốn tìm hiểu về những khái niệm nói trên có thể tham khảo trong một số tài liệu như:

[1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên) - Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng, NXB Giáo Dục 2008.
[2] Các diễn đàn: http://maths.vn, http://diendantoanhoc.net,...

Sử dụng phép thế lượng giác để xác định CTTQ dãy số

Nhiêu công thức truy hồi phức tạp trở thành đơn giản nhờ thực hiện phép thế lượng giác. Chúng ta hãy cùng nhau xét những ví dụ sau.

Ví dụ 8:

Hãy tìm cách biểu diễn $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ dưới một dạng khác.

Ý tưởng:

Đây là một bài toán kinh điển trong lượng giác, nếu tinh mắt một chút ta có thể dễ dàng đưa nó về một bài toán dãy số, cách làm đó như sau:

Đặt: $u_1=\sqrt{2},\ u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},...,\ u_n=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$

Từ đó suy ra: $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$.

Giải:

Ta thấy:

$$u_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow u_2=\sqrt{2+u_1}\Leftrightarrow u_2^2=2+u_1=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)=4\cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow u_2=2\cos\frac{\pi}{8}.$$

Từ đó suy ra: $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (các bạn có thể dùng chứng minh quy nạp để kiểm tra lại).

Tiếp tục ý tưởng dùng phép thế lượng giác, liên tưởng tới công thức

To be continue…

Các bài toán dãy số chọn lọc

Trong phần này tôi sẽ đưa ra một số bài toán dãy số mà trong quá trình giải có sử dụng kết quả của các phần trước.

Ví dụ: *(HSG Quốc gia 1997)*

Cho dãy số $(x_n): x_1 = 7,\ x_2 = 50,\ x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1975\ \forall n \geq 2.$
Chứng minh rằng: $x_{1996} \vdots 1997.$

Giải:

Ví dụ: *(IMO 1967)*

Trong một cuộc thi đấu thể thao có m huy chương, được phát trong n ngày thi đấu. Ngày thứ nhất phát một huy chương và $\frac{1}{7}$ số huy chương còn lại. Ngày thứ hai phát hai huy chương và $\frac{1}{7}$ số huy chương còn lại. Những ngày còn lại được tiếp tục tương tự như vậy. Ngày sau cùng còn lại n huy chương để phát. Hỏi có tất cả bao nhiêu huy chương và được phát trong bao nhiêu ngày?

Ý tưởng:

Thoạt nhìn ta thấy đây chỉ là một bài toán đố đơn thuần, nhưng nếu "nhạy cảm" một chút ta có thể biến nó về một bài toán dãy số. Nếu gọi u_k là số huy chương phát trong ngày thứ k thì:

$$u_0 = m,\ u_1 = 1 + \frac{1}{7}(m-1),\ u_2 = 2 + \frac{1}{7}\left[m - \left(1 + \frac{1}{7}(m-1)\right) - 2\right] = \frac{6}{7}\left(1 + \frac{1}{7}(m-1)\right) - \frac{6}{7}$$

$\Rightarrow u_2 = \frac{6}{7}u_1 - \frac{6}{7}$, bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$u_{k+1} = \frac{6}{7}u_k + k - \frac{k}{7} = \frac{6}{7}u_k - \frac{6}{7}k\ \ \forall k \geq 2.$$

Giải:

Từ công thức truy hồi tìm được, ta suy ra: $u_n = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}(m-36) - 6n + 42 = n$

$\Rightarrow m - 36 = (7n-42)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} = (n-6)\frac{7^n}{6^{n-1}}$. Do $(7,6) = 1$ và

$$6^{n-1} > n - 6 \Rightarrow n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6 \Rightarrow m = 36.$$

Vậy có 36 huy chương phát trong 6 ngày.

To be continue…

Bài tập đề nghị

Bài viết đến đây là kết thúc, sau khi đọc bài viết này, các bạn hãy tự mình giải một số bài tập đề nghị sau đây.

Bài 1:

Cho dãy $(u_n):\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm CTTQ (u_n).

Bài 2: *(HSG Quốc gia bảng A - 1998)*

Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_0 = 20,\ u_1 = 100 \\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1} + 20 \ \forall n \geq 2 \end{cases}$

Tìm số nguyên dương h bé nhất sao cho: $u_{n+h} - u_n \vdots 1998 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

To be continue…

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên) - Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng, NXB Giáo Dục 2008.

[2] Nguyễn Tất Thu – Chuyên đề hội giảng: *Một số phương pháp xác định công thức tổng quát của dãy số*, 2008.

[3] Một số chuyên đề từ Internet.